数理解析研究所講究録
180巻 1973年 52-59

Algebraic Kripke model

京大理　永井　覚

中間論理など non-classical logic の研究に於いては、semantical な方法が重要な役割を果す。その場合、その semantics が complete であることが不可欠な条件となる。ところが最近、小野 [1], [2] に於いて示されたように、中間述語論理に対しては、従来の semantics 即ち algebraic semantics と Kripke-type semantics はいずれも incomplete であることが分った。従って新しい semantics が要求される訳であるが、その場合既存の二つの semantics より powerful であることが新しい semantics として採用される一つの条件となるであろう。ここではそのようなものとして最も自然に得られる semantics を考えてみた。それは algebraic semantics と Kripke-type semantics を言わば張り合わせたもので、そのおのおのを特殊な場合として含むものである。この semantics が中間述語論理に対して

complete となるか否かは未だ知られていない。ここでは専ら中間論理に対する semantics のみを述べるが様相論理に対しても同様の semantics を定義することができる[4]。

§1.

descriptive constants を含まない language $\mathcal{L}$ を固定する。$\mathcal{L}$ は individual variables, n-adic predicate variables ($n \geqq 0$) と logical symbols $\wedge, \vee, \neg, \rightarrow, \exists, \forall$ を含むものとする。

Def. 1.1. 擬ブール代数(以下 pBa と略す) $\mathbf{P}$ は $\alpha < \lambda$ なるすべての cardinal α に対して、α-complete であるとき $\lambda^{<}$-complete であるという。同様に pBa の $\lambda^{<}$-complete subalgebra, pBa 間の $\lambda^{<}$-complete homomorphism 等が定義される。

Def. 1.2. Algebraic Kripke model とは次の条件を充す triple $(M, \nabla; \mathbf{P})$ を云う、

1) M は空でない半順序集合(以下 p.o.s. と略す)、その順序関係を $\leqq_M$ で表わす。

2) ∇ は M からある集合の巾集合への mapping で各 $a \in M$ に対して $\nabla(a)$ は空でなく、又 $a \leqq_M b$ ならば $\nabla(a) \subseteq \nabla(b)$ が成立する。

3) P は non-degenerate な $\kappa(M,\nabla)^{<}$-complete pBa. 但し $\kappa(M,\nabla)$ は $\min\{\sigma \mid$ すべての $a\in M$ に対して $\sigma > \overline{\overline{\nabla(a)}}$ かつ $\sigma > \overline{\overline{\{b\in M \mid a\leq_M b\}}}\}$ である。

$(M,\nabla;P)$ を一つの algebraic Kripke model としよう (以後単に model と呼ぶことにする)。次に $(M,\nabla;P)$-valuation を定義する。$\mathcal{L}[\nabla]$ を $\mathcal{L}$ に $\bigcup_{a\in M}\nabla(a)$ の各元 ξ の name $\underline{\xi}$ を付け加えた language とする。その時 $(M,\nabla;P)$-valuation $\mathcal{W}$ とは $\{\mathcal{L}[\nabla]$ の closed formula$\}\times M$ から P への mapping で次の条件を満足するものを云う。

1) 各 n-adic $(n\geq 0)$ predicate variable $p^{(n)}$ に対し、$a\leq_M b$ かつ $\langle \xi_1,\cdots,\xi_n\rangle \in \nabla(a)^n$ ならば $\mathcal{W}(p^{(n)}\underline{\xi_1}\cdots\underline{\xi_n}, a)\leq \mathcal{W}(p^{(n)}\underline{\xi_1}\cdots\underline{\xi_n}, b)$

2) $\mathcal{W}(A\wedge B, a) = \mathcal{W}(A,a)\cap \mathcal{W}(B,a)$

3) $\mathcal{W}(A\vee B, a) = \mathcal{W}(A,a)\cup \mathcal{W}(B,a)$

4) $\mathcal{W}(\neg A, a) = \bigcap_{a\leq_M b} -\mathcal{W}(A,b)$

5) $\mathcal{W}(A\rightarrow B, a) = \bigcap_{a\leq_M b} (\mathcal{W}(A,b)\supset \mathcal{W}(B,b))$

6) $\mathcal{W}(\exists x A, a) = \bigcup_{\xi\in\nabla(a)} \mathcal{W}(A_x[\underline{\xi}], a)$

7) $\mathcal{W}(\forall x A, a) = \bigcap_{a\leq_M b}\bigcap_{\xi\in\nabla(b)} \mathcal{W}(A_x[\underline{\xi}], b)$。

$\mathcal{L}$ の formula A は その universal closure A' が 任意の $a\in M$ と任意の $(M,\nabla;P)$-valuation $\mathcal{W}$ に対して、

$\overline{W}(A', a) = 1_P$ を充すとき、model $(M, \nabla; P)$ で valid であるという。$(M, \nabla; P)$ で valid な $\mathcal{L}$ の formula 全体を $L(M, \nabla; P)$ とするとき、次の定理が成立する。以下 $L(M, \nabla; P)$ と書くときは $(M, \nabla; P)$ が model であることを仮定する。

Th. 1.3.　$L(M, \nabla; P)$ は modus ponens, 一般化 及び代入に関して閉じてい、直観主義述語論理 LJ を含む。

Th. 1.4.　1) M が singleton $\{a\}$ ならば $L(\{a\}, \nabla; P)$ は [3] に於ける $L^+(P, \nabla(a))$ と一致し、$(\{a\}, \nabla; P)$ は algebraic model と見做せる。

2) P が二値のブール代数 S_1 ならば $(M, \nabla; S_1)$ は従来の Kripke model であって、従って $L(M, \nabla; S_1)$ は [3] に於ける $L(M, \nabla)$ と一致する。

Lemma 1.5.　1) P' が P の $\kappa(M, \nabla)^{\leq}$-complete subalgebra ならば、$L(M, \nabla; P) \subseteq L(M, \nabla; P')$.

2) P から Q へ $\kappa(M, \nabla)^{\leq}$-complete な onto-homomorphism f があり、又 Q から P へ order-preserving な mapping f' で $f \circ f' = id_Q$ となるものがあれば、$L(M, \nabla; P) \subseteq L(M, \nabla; Q)$.

3) (M, ∇) が [3] の意味で (M', ∇') に embeddable ならば $L(M, \nabla; P) \subseteq L(M', \nabla'; P)$.

この lemma の 1) より $L(M,\nabla;P)$ が中間述語論理となる一つの十分条件が得られる。

Cor. 1.6. $\overline{\overline{\nabla(a)}} \geqq \aleph_0$ なる $a\in M$ が存在すれば $L(M,\nabla;P) \subseteq LK$.

§2

この節では特に我々の semantics の propositional part の構造を調べる。従って model は対 (M,P) となり $L(M,P)$ は中間命題論理となる。

一般に P が pBa で、M が p.o.s であるとき $[P^M]$ によって M から P への order-preserving な mapping 全体の集合を表わすと、$[P^M]$ は

$$(f\cup g)(a) = f(a)\cup g(a)$$
$$(f\cap g)(a) = f(a)\cap g(a)$$

なる operations によって pBa となる(小野)。但し pBa $[P^M]$ の最小元は 0_P を値にもつ constant mapping で

$$(f\supset g)(a) = \bigcap_{a\leq_M b}(f(b)\supset g(b))$$

となる。

Th. 2.1. $L(M,P) = L^+([P^M])$、但し $L^+([P^M])$ は algebraic model $[P^M]$ によって特徴づけられる logic である。

Lemma 2.2　M, N が p.o.s で P が pBa のとき

1) $[P^{M\times N}] \cong [[P^M]^N]$

2) $[P^{M+N}] \cong [P^M]\times[P^N]$、但し $M\times N$ は M と N の直積を、$M+N$ は M と N の直和を表わす。

Cor 2.3　1) $L(M\times N, P) = L(N, [P^M])$

$$= L(M, [P^N])$$

2) $L(M+N, P) = L(M, P)\cap L(N, P)$.

M を finite p.o.s、A を $\mathcal{L}$ の formula (propositional) とする。今 A の各 subformula B と各 $a\in M$ に対し formula $\delta_a^A(B)$ を次のように帰納的に定義する。A の propositional variables p_i $(1\leq i\leq n)$ の各々に対し その $\overline{\overline{M}}$ 個のコピー $\{p_{ia}\,|\,a\in M\}$ (但し p_{ia} は A に現われないとする。) を用意する。

1) $\delta_a^A(p_i) = \bigwedge_{a\leq_M b} p_{ib}$

2) $\delta_a^A(B\wedge C) = \delta_a^A(B)\wedge\delta_a^A(C)$

3) $\delta_a^A(B\vee C) = \delta_a^A(B)\vee\delta_a^A(C)$

4) $\delta_a^A(\neg B) = \bigwedge_{a\leq_M b}\neg\delta_b^A(B)$

5) $\delta_a^A(B\to C) = \bigwedge_{a\leq_M b}(\delta_b^A(B)\to\delta_b^A(C))$。

Th. 2.4.　M が finite p.o.s のとき $A\in L(M, P)$ となる必要十分条件は $\bigwedge_{a\in M}\delta_a^A(A)\in L^+(P)$.

Cor 2.5. 1) M が finite p.o.s 又 P_1, P_2 が pBa で $L^+(P_1) \subseteq L^+(P_2)$ ならば $L(M, P_1) \subseteq L(M, P_2)$.

2) M_1, M_2 が p.o.s、P が finite pBa で $L(M_1) \subseteq L(M_2)$ ならば $L(M_1, P) \subseteq L(M_2, P)$.

3) M が finite p.o.s、P が pBa で $L^+(P)$ が decidable ならば $L(M, P)$ も decidable.

4) M が finite p.o.s で最小元を持ち、P が pBa で $L^+(P)$ が disjunction property を持てば $L(M, P)$ も disjunction property を持つ。

さて lemma 1.5 より $L(M, P) \subseteq L(M) \cap L^+(P)$ が成立するが等号が一般に成立しないことは次の定理によって知られる。

Th. 2.6. M, N が p.o.s で $L(M) \in \mathcal{S}_m$, $L(N) \in \mathcal{S}_n$ $(m, n < \omega)$ ならば $L(M, [S_1]^N) \in \mathcal{S}_{m+n-1}$

References

[1] H. Ono : Incompleteness of semantics for intermediate predicate logics I, — Kripke's semantics, to appear.

[2] H Ono : Incompleteness of semantics for intermediate predicate logics II, — The algebraic semantics, to appear.

[3] H. Ono : A study of intermediate predicate logics, to appear in Publ. RIMS, Kyoto Univ.

[4] S. Nagai : On a semantics for non-classical logics, unpublished.